JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 11, 436–452 (1972)

Sélections Linéaires Associées au Théorème de Hahn-Banach

HICHAM FAKHOURY

Université de Paris VI, Département de Mathématiques
11, quai Saint-Bernard, Tour 46, Paris (5°)

Présenté par les Éditeurs

Received February 15, 1972

I. INTRODUCTION

Soient M un sous-espace fermé d'un espace de Banach réel V, et f une forme linéaire continue sur M; on note π_f l'ensemble non vide des formes linéaires sur V dont la restriction à M coincide avec f. Une sélection T associée à l'application multivoque π est une application du dual de M dans le dual de V vérifiant $T(f) \in \pi_f$.

Le but de ce travail est d'étudier les couples (M, V) pour lesquels il existe une sélection linéaire continue T associée à π. S'il existe une sélection linéaire de norme inférieure à λ, nous dirons que le couple est λ-admissible; le couple (M, V) est admissible si $\lambda = 1$. Il est clair que le couple (M, V) est λ-admissible si, et seulement si, le polaire M^0 de M est noyau d'une projection de norme inférieure à λ. Après avoir introduit quelques notations, nous montrons que l'existence d'une sélection linéaire continue est équivalente à l'existence d'une selection uniformément continue associée à π, ainsi qu'à l'existence d'une sélection uniformément continue du dual lipchitzien de M dans le dual lipchitzien de V. Ceci permet de montrer que le couple (M, V) est λ-admissible dès qu'il existe une projection uniformément continue (non nécessairement linéaire) de V sur M.

Dans la troisième partie, il est établit que le couple (M, V) est λ-admissible si, et seulement si, tout opérateur défini continu sur M et à valeurs dans un espace de dimension fini Y admet un prolongement $\tilde{T}$ de V dans Y vérifiant $\| \tilde{T} \| \leqslant \lambda \| T \|$. Ce résultat constitue une "localisation" des résultats de Lindenstrauss sur la caractérisation des espaces de Banach dont le bidual est un $\mathscr{P}_\lambda$-espace. Ceci permet aussi de montrer qu'un espace de Banach est isomorphe à un espace de Hilbert réel si, et seulement si, tout sous-espace faiblement fermé de son dual est facteur direct; la projection considérée n'étant pas faiblement continue à priori.

Aprés la réalisation de ce travail nous avons appris que H. Lacey a obtenu un résultat analogue au corollaire 3.3 dans [19]. Nous le remercions vivement pour nous avoir indiqué une erreur dans la première version de ce travail. Une partie des résultats de cet article ont été annoncés dans [21].

II. Caractérisations des Couples λ-Admissibles

Soit V un espace de Banach réel, on note V' l'espace dual de V muni de la norme duale; sauf mention du contraire l'espace V' sera muni de la topologie associée à cette norme. Dans la suite nous confondrons un espace V avec son image canonique dans son bidual V''. Si M est un sous-espace de V, on note M^0 le polaire de M dans l'espace V'; on sait que l'espace M'' est canoniquement isométrique à l'espace $M^{00} \subset V''$, et cette isométrie permet d'identifier $M \subset M^{00}$ à son image canonique dans M''. Si V est un espace de Banach, nous noterons $B(V)$ la boule unité de V, et $B_V(x, r)$ la boule fermée de V de centre x et de rayon r; si aucune confusion n'est à craindre nous noterons cette boule $B(x, r)$. Si V est un espace de Banach, $V^{\#}$ désignera le dual lipchitzien de V; à savoir l'espace des fonctions lipchitziennes définies sur V à valeurs réelles et nulles en zéro. L'espace $V^{\#}$ sera muni de la norme suivante:

$$\| F \| = \sup \left\{ \frac{| F(x) - F(y) |}{\| x - y \|} \, ; \, x \neq y, \, x, y \in V \right\}$$

Ainsi l'espace V' peut être considéré comme un sous-espace de Banach de $V^{\#}$. Si M est un sous-espace de V on notera $M_{\#}{}^0$ le polaire de M dans $V^{\#}$. On peut munir l'espace $V^{\#}$ de la topologie de la convergence simple sur V. Cette topologie n'est pas une topologie faible sur $V^{\#}$, puisque les élements de $V^{\#}$ n'opèrent pas linéairement sur V. Cependant, muni de cette topologie la boule $B(V^{\#})$ est compacte, comme le montre une vérification immédiate. Dans la suite, nous préciserons à chaque fois la topologie considérée sur l'espace $V^{\#}$.

Un espace de Banach V est un *L-espace* s'il existe une mesure μ définie sur un espace localement compact Ω tel que V soit isométrique à l'espace $L^1(\mu)$. Un espace de Banach est un ***prédual de L-espace*** si l'espace V' est lui-même un L-espace. Ces espaces ont été particulièrement étudiés dans [11].

Soient E un espace métrique et $d(x, A)$ la distance de x à une partie A de E; une application P de E sur A est dite une projection métrique si $d(x, A) = d(x, P(x))$, pour tout point x de E. La compacité faible des boules fermées dans un espace de Banach dual permet de montrer l'existence d'une telle projection sur toute partie faiblement fermée.

Rappelons le résultat suivant qui sera utilisé dans la suite, [voir [12] pour les réfrérences].

LEMME 2.1. *Une fonction numérique lipchitzienne définie sur une partie d'un espace métrique E admet une extension lipchitzienne de même norme définie sur tout E.*

LEMME 2.2. *Soient V un espace de Banach et M un sous-espace de V; pour toute fonction F de $V^{\#}$ nous avons $\| F_M \| = d(F, M_{\#}{}^0)$. Si f est une forme linéaire de V', nous avons $\| f_M \| = d(f, M^0)$.*

Démonstration. Soit G dans $M_{\#}{}^0$, nous avons

$$\| F - G \| = \sup \left\{ \frac{|(F-G)(x) - (F-G)(y)|}{\| x - y \|} ; x \neq y, x, y \in V \right\} \geqslant \| F_M \|.$$

Ce qui prouve l'inégalité $d(F, M_{\#}{}^0) \geqslant \| F_M \|$. Inversement soit G une fonction lipchitzienne sur V qui prolonge la fonction F_M et vérifie $\| G \| = \| F_M \|$, la fonction lipchitzienne $F - G$ est évidemment dans $M_{\#}{}^0$, et nous avons $\| F - (F - G) \| = \| F_M \|$. Ceci prouve l'inégalité inverse et achève la démonstration. La deuxième partie se démontre par la même méthode.

DÉFINITION 2.3. Soient V un espace de Banach et M un sous-espace fermé de V; le couple (M, V) est appelé λ-*admissible* (resp. *admissible*) s'il existe un opérateur linéaire T de norme inférieure à λ (resp. de norme 1) de M' dans V' tel que pour tout f de M' la forme linéaire $T(f)$ soit un prolongement de f.

Remarques. (a) Le couple (M, V) est λ-admissible si, et seulement si, le sous-espace M^0 de V' est le noyau d'une projection de norme λ.

(b) Il résulte des théorèmes de Michael [16] que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une sélection continue T_ϵ de M' dans V' vérifiant $\| T_\epsilon(f) \| \leqslant (1 + \epsilon) \| f \|$ et $T_\epsilon(\lambda f) = \lambda T(f)$. Cette application n'est pas linéaire en général.

(c) Si le couple (M, V) est $(\lambda + \epsilon)$-admissible pour tout $\epsilon > 0$, un raisonnement de compacité montre que le couple (M, V) est λ-admissible.

EXEMPLES. Si M est un espace de Banach, le couple (M, M'') est admissible; de même si M est facteur direct dans V le couple (M, V) est λ-admissible pour un $\lambda < \infty$.

Si M est un idéal fermé de l'espace $C(X)$ des fonctions définies continues sur un compact X, le couple $(M, C(X))$ est admissible. Plus généralement, c'est le cas si M est un idéal d'ordre positivement engendré dans un espace simplicial V ou un M-idéal dans un espace de Banach quelconque (voir [1, 5]). Dans ce cas il existe une *unique* sélection T qui vérifie $\| T(f)\| = \|f\|$, pour $f \in M'$; T est linéaire.

THÉORÈME 2.4. *Soient V un espace de Banach et M un sous-espace fermé de V; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *le couple (M, V) est λ-admissible;*

(b) *Il existe une projection linéaire P de V' sur M^0 qui vérifie pour tout f de V' l'inégalité $\|f - P(f)\| \leqslant \lambda d(f, M^0)$;*

(c) *Il existe une sélection linéaire continue de $M^\#$ dans $V^\#$ de norme inférieure a λ.*

(d) *Il existe une projection linéaire P de $V^\#$ sur $M_\#{}^0$ qui vérifie pour tout F de V l'inégalité suivante $\|F - P(F)\| \leqslant \lambda d(F, M_\#{}^0)$.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (*b*). Soit T la sélection linéaire de M' dans V' ; notons P l'opérateur défini sur V' par $P(f) = f - T(f_M)$. Il est clair que $P(f)$ est dans M^0; de plus P est une projection linéaire de V' sur M^0. D'autre part, on a l'égalité suivante:

$$\|f - P(f)\| = \| T(f_M)\| \leqslant \lambda \|f_M\|.$$

En utilisant le Lemme 2.2 on trouve l'inégalité $\|f - P(f)\| \leqslant \lambda d(f, M^0)$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Remarquons que les espaces M' et V'/M^0 sont canoniquement isométriques, et que l'application quotient de V' sur V'/M^0 coincide avec l'application restriction $f \to f_M$. Comme l'espace M^0 est complémenté dans V', l'application canonique de V' sur V'/M^0 admet un relèvement linéaire T_0. On peut supposer que T_0 opère sur M' et que c'est une sélection de M' dans V'. Soit T l'opérateur défini sur M' par $T(f) = T_0(f) - P(T_0(f))$. Nous avons les inégalités suivantes: $\| T(f)\| \leqslant \lambda d(T_0(f), M^0) = \lambda \| T_0(f)_M\| \leqslant \lambda \| f \|$; ceci achève la démonstration.

(c) $\Leftrightarrow$ (d). La démonstration suit le même schéma que précédemment, en utilisant toutefois le résultat suivant:

L'espace $M^\#$ est canoniquement isométrique à l'espace $V^\#/M_\#{}^0$; de plus, l'application quotient de $V^\#$ sur $V^\#/M_\#{}^0$ coincide avec l'application restriction $F \to F_M$.

(a) $\Leftrightarrow$ (c). Cette équivalence est une conséquence du Théorème 2.11 que nous verrons plus loin.

Soient V un espace de Banach et M l'espace engendré par un point x de V; le couple (M, V) est admissible; par suite:

COROLLAIRE 2.5. *Soit H un hyperplan $\sigma(V', V)$-fermé dans V'; il existe une projection métrique linéaire de V' sur H.*

COROLLAIRE 2.6. *Soit M un sous-espace fermé de V; pour que le couple (M, V) soit λ-admissible, il faut et il suffit qu'il existe un opérateur linéaire T de V dans M'' de norme λ et dont la restriction à M coïncide avec l'identité.*

Démonstration. S'il existe une projection linéaire P de V' sur M^0 telle que $\| I - P \| \leqslant \lambda$, la transposée $I - P'$ est de norme inférieure à λ et vérifie $(I - P')(V'') = M^{00}$. Soit T la restriction de $I - P'$ à V, cet opérateur coïncide avec l'identité sur M et sa norme est majorée par λ.

Inversement, si T est un tel opérateur, T' est un opérateur de norme inférieure à λ de M''' dans V' ; par suite, $T'|_{M'}$ est une sélection linéaire de norme λ de M' dans V'.

Rappelons les deux résultats suivants démontrés dans [3, 12].

LEMME 2.7. *Soient X un convexe d'un espace de Banach et T une application uniformément continue de X dans un espace métrique (Y, d). Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\lambda < \infty$ tel que, pour tous x, y de X vérifiant $\| x - y \| > \epsilon$ on ait $d(T(x), T(y)) \leqslant \lambda \| x - y \|$.*

LEMME 2.8. *Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach V. Si on note R_1 et R_2 les applications canoniques de $V^{\#}$ sur $M^{\#}$ et de V' sur M', il existe deux projections linéaires de norme 1, P_V et P_M de $V^{\#}$ sur V' et de $M^{\#}$ sur M' telles que $R_2 \circ P_V = P_M \circ R_1$.*

Le theéorème suivant est une conséquence des méthodes de [12].

THÉORÈME 2.9. *Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach V; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe une sélection linéaire continue de M' dans V';*
(b) *Il existe une sélection lipchitzienne de M' dans V';*
(c) *Il existe une sélection uniformément continue de M' dans V';*
(d) *Il existe une sélection positivement homogène et uniformément continue de $B(M')$ dans V'.*

Démonstration. Il est clair que l'on a (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) et (a) $\Rightarrow$ (d).

(c) $\Rightarrow$ (a): Soit U une sélection uniformément continue de M' dans V', on peut toujours supposer que l'on a $U(0) = 0$. On pose $U_n(x) = U(nx)/n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in M'$. Pour tout point x de M' la suite $U_n(x)$ est bornée dans V' ; en effet, d'après le Lemme 2.7, il existe $\lambda < \infty$ tel que $\| x - y \| \geqslant 1$ implique $\| U(x) - U(y)\| \leqslant \lambda \| x - y \|$; par suite, pour n assez grand $\| U_n(x)\| \leqslant \lambda \| x \|$. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$; les boules fermées $B_{V'}(0, \lambda \| x \|)$ étant $\sigma(V', V)$-compactes, on pose $T(x) = \lim_{\mathscr{U}} U_n(x)$; où la limite est prise au sens de la topologie $\sigma(V', V)$. Comme la norme sur V' est faiblement semi-continue inférieurement, nous avons, pour tous x, y de M' :

$$\| T(x) - T(y)\| \leqslant \lim_{\mathscr{U}} \| U_n(x) - U_n(y)\|,$$

et pour n assez grand : $\| U_n(x) - U_n(y)\| \leqslant \lambda \| x - y \|$. Soit $T^{\#}$ l'opérateur linéaire de $V'^{\#}$ dans $M'^{\#}$ défini par $T^{\#}(F)(x) = F(T(x))$ pour tout F de V' et $x \in M'$. Il est clair que $\| T^{\#} \|$ est inférieure à λ. D'après le Lemme 2.8, il existe une projection P_M de $M'^{\#}$ sur M'' ; l'opérateur $P_M \circ T^{\#}$ restreint à V vérifie les conditions du Corollaire 2.6.

(d) $\Rightarrow$ (c). Soit U une sélection uniformément continue et positivement homogène de $B(M')$ dans V'. On peut prolonger U en une sélection positivement homogène de M' dans V' en posant

$$U'(x) = \| x \| \, U\left(\frac{x}{\| x \|}\right).$$

Ainsi définie, U' est uniformément continue, on est donc dans les conditions de (c).

Le principe de "reflexivité locale" suivant est démontré dans [13, p. 332].

LEMME 2.10. *Soit M un espace de Banach, N un sous-espace de M'' de dimension finie, et $\epsilon > 0$; il existe un opérateur injectif T_N de N dans M vérifiant $T(x) = x$ pour tout point x de $N \cap M$ et*

$$\| T_N \| \| T_N^{-1} \| \leqslant 1 + \epsilon.$$

THÉORÈME 2.11. *Soit M un sous-espace fermé de V; les assertions suivantes sont équivalentes*:

(a) *Il existe une sélection linéaire continue de M' dans V'* ;
(b) *Il existe une sélection linéaire continue de $M^{\#}$ dans $V^{\#}$* ;

(c) *Il existe une sélection lipchitzienne de $M^{\#}$ dans $V^{\#}$;*

(d) *Il existe une sélection uniformément continue de $M^{\#}$ dans $V^{\#}$;*

(e) *Il existe une sélection positivement homogène et uniformément continue de $B(M^{\#})$ dans $V^{\#}$.*

Démonstration. Les implications (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) et (b) $\Rightarrow$ (e) sont élémentaires. De plus, en utilisant le fait que les boules fermées de l'espace $V^{\#}$ munies de la topologie de la convergence simple sur l'espace V sont compactes, et que la norme sur $V^{\#}$ est semi-continue inférieurement par rapport à cette topologie; une méthode analogue à celle du Théorème 2.9 prouve les implications (e) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (c).

(c) $\Rightarrow$ (a). Soient P_V la projection de $V^{\#}$ sur V' et T la sélection lipchitzienne de $M^{\#}$ dans $V^{\#}$; l'application $P_V T\,|_{M'}$ est une sélection lipchitzienne de M' dans V', et la conclusion est alors conséquence du Théorème 2.9.

(a) $\Rightarrow$ (b). D'après le Corollaire 2.6 il existe un opérateur linéaire continu T de V dans M'' dont la restriction à M coïncide avec l'identité. L'opérateur $T^{\#}$ de $M''^{\#}$ dans $V^{\#}$ défini par $T^{\#}(F)(x) = F(T(x))$, pour tout F dans $M''^{\#}$ et x dans V. Cette opérateur est linéaire et de norme $\|T\|$. Il suffit de montrer l'existence d'une sélection linéaire S de $M^{\#}$ dans $M''^{\#}$, l'opérateur $T_o S$ sera la sélection linéaire recherchée de $M^{\#}$ dans $V^{\#}$. Soient N un sous-espace de dimension finie dans M'' et ϵ un nombre strictement positif; notons $T_N{}^{\#}$ l'opérateur linéaire de $M^{\#}$ dans $N^{\#}$ défini par $T_N{}^{\#}(F)(x) = F(T_N(x))$ pour tout x de N et F de $M^{\#}$. Il est clair que la norme de $T_N{}^{\#}$ est inférieure à $1 + \epsilon$. Soit $\mathscr{X}$ l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de M'' ordonné par inclusion; pour tout N dans $\mathscr{X}$ posons t_N l'application de $M^{\#}$ dans $\mathbb{R}^{M''}$ définie par:

$$t_N(F)(x) = \begin{cases} T_N{}^{\#}(F)(x) & \text{si} \quad x \in N, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin N. \end{cases}$$

Pour tout F dans $M^{\#}$ la famille $t_N(F)$ est bornée dans $\mathbb{R}^{M''}$ muni de la topologie produit; en effet, pour tout F dans $M^{\#}$ et tout x dans M'' on a l'inégalité suivante $|t_N(F)(x)| \leqslant (1 + \epsilon)\|F\|\,\|x\|$. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur $\mathscr{X}$ plus fin que le filtre des sections finissantes; pour tout F posons $S(F) = \lim_{\mathscr{U}} t_N(F)$, où la limite est prise au sens de la topologie de la convergence simple. L'application S est linéaire, et de plus, pour tout F dans $M^{\#}$ l'application $S(F)$ est lipchitzienne de M'' dans $\mathbb{R}$; en effet pour tous x, y dans M'' et tout sous-espace N de $\mathscr{X}$ contenant x et y on a:

$$|T_N{}^{\#}(F)(x) - T_N{}^{\#}(F)(y)| \leqslant (1 + \epsilon)\|F\|\,\|x - y\|,$$

Comme les sous-espaces N contenant x et y forment une section finissante de $\mathscr{X}$, cette inégalité passe à la limite; par conséquent

$$| S(F)(x) - S(f)(y)| \leqslant (1 + \epsilon) \|F\| \|x - y\|.$$

Pour terminer il reste à verifier que l'opérateur S ainsi défini est une sélection de $M^{\#}$ dans $M''^{\#}$; pour cela il suffit de remarquer que les sous-espaces N contenant un point x de M forment une section finissante de $\mathscr{X}$, et par construction, pour un tel sous-espace N on a $T_N{}^{\#}(F)(x) = F(x)$; ce qui achève la démonstration. Un raisonnement de compacité montre que la sélection S peut être prise de norme 1.

COROLLAIRE 2.12. (a) *Soit M un sous-espace fermé de V; s'il existe une projection uniformément continue de V sur M, (c'est-à-dire une application idempotente de V sur M non nécessairement linéaire) il existe* $1 \leqslant \lambda < \infty$ *tel que le couple (M, V) soit λ-admissible.*

(b) *S'il existe une projection lipchitzienne de M'' sur M, pour qu'il existe une projection lipchitzienne de V sur M, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda < \infty$ tel que le couple (M, V) soit λ-admissible.*

Démonstration. (a) S'il existe une projection uniformément continue de V sur M; la méthode utilisée dans la démonstration du Théorème 2.8 montre l'existence d'une application lipchitzienne T de V dans M'' qui coïncide avec l'identité sur M. Soit $T^{\#}$ l'opérateur linéaire de $M''^{\#}$ dans $V^{\#}$ défini par $T^{\#}(F)(x) = F(T(x))$, pour tout F de M'' et x de V; comme il existe une sélection linéaire S de norme 1 de $M^{\#}$ dans $M''^{\#}$ (Théorème 2.11), l'opérateur $T_0^{\#}S$ est une sélection linéaire de $M^{\#}$ dans $V^{\#}$; on conclut d'après le Théorème 2.11.

(b) La condition nécessaire est une conséquence de (a); inversement, supposons qu'il existe une projection lipchitzienne de M'' sur M et que le couple (M, V) est λ-admissible; le Corollaire 2.6 permet de conclure à l'existence d'une projection lipchitzienne de V sur M.

Remarques. On ignore s'il existe toujours une projection lipchitzienne de M'' sur M. Toutefois, il est montré dans [12] que c'est le cas si M est l'espace des fonctions uniformément continues sur un espace métrisable.

Si M est facteur direct dans un espace dual (ou ce qui revient au même dans M''), le couple (M, V) est λ-admissible si, et seulement si, il existe une projection linéaire de V sur M. C'est en particulier le cas si M est un L-espace.

Lemme 2.13.[1] *Soient U un espace de Banach et $V = W'$ un espace de Banach dual; s'il existe une famille filtrante croissante $(E_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ de sous-espaces de U tel que $U = \overline{\cup E_\gamma}$, avec des opérateurs T_γ de E_γ dans V, de norme inférieure à λ, il existe un opérateur T de U dans V, de norme inférieure à λ, tel que pour tout x dans E_γ le point $T(x)$ est $\sigma(V, W)$-adhérent à la famille $(T_{\gamma'})(x))_{\gamma'\in\Lambda}$ pour $\gamma' \geqslant \gamma$.*

Démonstration. Soit $P = \prod_{x\in\cup E_\gamma} B_V(0, \lambda \| x \|)$ muni de la topologie produite où chacun des facteurs est muni de la topologie faible. Pour tout $\gamma \in \Lambda$, on note t_γ le point de P défini par ses coordonnées de la façon suivante:

$$t_\gamma(x) = \begin{cases} T_\gamma(x) & \text{si} \quad x \in E_\gamma\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E_\gamma\,. \end{cases}$$

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur Λ plus fin que le filtre des sections finissantes de Λ; à cause de la compacité des boules fermées de V, il est possible de définir $T = \lim_{\mathscr{U}} t_\gamma$; où la limite est prise au sens de la topologie de P. Comme la famille $(E_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ est filtrante croissante, T vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \alpha T(x) + \beta T(y), && \text{pour } x, y \text{ dans } UE_\gamma\,, \\ \| T(x)\| &\leqslant \lambda \| x \| && \text{pour } x \text{ dans } UE_\gamma\,. \end{aligned}$$

Comme la réunion des espaces E_γ est totale, l'application T se prolonge en un opérateur unique qui vérifie naturellement les conditions du lemme.

Théorème 2.14. *Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach V; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le couple (M, V) est λ-admissible;*

(b) *Pour tout sous-espace N de V de dimension finie et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un opérateur T_N de N dans M, de norme inférieure à $\lambda + \epsilon$, et dont la restriction à $N \cap M$ coïncide avec l'identité.*

(c) *Pour tout sous-espace X de V tel que $M \subset X \subset V$ avec $\dim X/M < \infty$, le couple (M, X) est λ-admissible.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). Soient N un sous-espace de dimension finie de V; d'après le Corollaire 2.6, il existe un opérateur T de V dans M'' qui coïncide avec l'identité sur M. Notons R un opérateur défini sur $T(N)$, et à valeurs dans M, donné par le Lemme 2.10. Posons $T_N = R \circ T|_N$; cet opérateur vérifie les conditions de l'assertion (b).

[1] Le lemme est connu, il est donné en guise de référence.

(b) $\Rightarrow$ (a). Si l'espace V est de dimension finie la condition (b) montre l'existence d'une projection de norme inférieure à $\lambda + \epsilon$ de V sur M, et un argument simple de compacité montre qu'il existe une projection de norme inférieure à λ de V sur M. Soit $\epsilon > 0$; si V est de dimension infinie, le Lemme 2.13 montre l'existence d'un opérateur T de V dans M'' qui coïncide avec l'identité sur M. D'après le corollaire 2.6 le couple (M, V) est $(\lambda + \epsilon)$-admissible, ceci étant réalisé pour tout $\epsilon > 0$, le couple (M, V) est λ-admissible.

(a) $\Leftrightarrow$ (c). Cette équivalence repose, comme ce qui précéde, sur le Corollaire 2.6 et sur le Lemme 2.13.

Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach V; on dira que M est un *facteur direct local* dans V s'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que pour tout sous-espace G de dimension finie dans V/M il existe un opérateur linéaire R_G de norme inférieure à α de G dans V tel que $\varphi \circ R_G$ coïncide avec l'identité sur G, où φ est l'application quotient de V sur V/M.

COROLLAIRE 2.15. *Si M est un facteur direct local dans V, il existe $1 \leqslant \lambda < \infty$ tel que le couple (M, V) soit λ-admissible.*

Le Théorème 2.15 (c) montre que l'on peut prendre $\lambda = \alpha + 1$; où α est la valeur qui intervient dans la définition de facteur direct local. Le corollaire suivant n'a d'intêret que si $\lambda < 2$ puisque dans un espace de Banach il existe une projection de norme 2 sur un hyperplan fermé.

COROLLAIRE 2.16. *Soient V un espace de Banach et M un sous-espace fermé de V; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Pour tout sous-espace X de V contenant M et tel que dim $(X/M) = 1$ le couple (M, X) est λ-admissible;*

(b) *Pour toute collection finie de points $(x_i)_{i=1}^n$ de M, toute collection de boules fermées $(B_V(x_i, r_i))_{i=1}^n$ d'intersection non vide et toute $\epsilon > 0$; les boules fermées $(B_M(x_i, \lambda r_i + \epsilon))_{i=1}^n$ ont une intersection non vide;*

(c) *Pour toute collection finie de points $(x_i)_{i=1}^n$ de M, et toute collection de boules ouvertes $(G_V(x_i, r_i))_{i=1}^n$ d'intersection non vide, les boules ouvertes $(G_M(x_i, \lambda r_i))_{i=1}^n$ ont une intersection non vide.*

Démonstration. (b) est équivalent à (c), comme le montre une vérification immédiate.

(a) $\Rightarrow$ (b). Soit x un point de l'intersection $\bigcap_{i=1}^n B_V(x_i, r_i)$; si le point x est dans M, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que le point x est dans $V \backslash M$, et notons $X = M + \mathbb{R}x$. Soit N le sous-espace de X engendré par les points $\{\{x\} \cup (x_i)_{i=1}^n\}$; pour tout $\epsilon > 0$, il existe un opérateur T_N de norme inférieure à $\lambda + \epsilon$ de N dans M donné par le Théorème 2.14, par suite le point $T_N(x)$ appartient à l'intersection $\bigcap_{i=1}^n B_M(x_i, \lambda r_i + \epsilon)$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Soit X un sous-espace de V contenant M tel que $\dim(X/M) = 1$ et supposons que l'injection canonique de M dans M'' n'admet pas d'extension à X de norme inférieure à λ. D'après le Lemme 5.2 de [11], il est clair que

$$\bigcap_{x \in M} B_{M''}(x, \lambda \| x - z \|) = \varnothing \qquad (\text{où } z \in X \backslash M).$$

Grâce à la compacité faible des boules fermées de M'', on peut conclure qu'il existe une collection finie $(x_i)_{i=1}^n$ de points de M tels que $\bigcap_{i=1}^n B_{M''}(x_i, \lambda \| x_i - z \|) = \varnothing$. D'après le Lemme 2.10, il existe $\epsilon > 0$ tel que les boules fermées $B_M(x_i, \lambda \| x_i - z \| + \epsilon)$ aient une intersection vide. Mais les boules $B_X(x_i, \| x_i - z \|)$ ont une intersection non vide puisqu'elles contiennent toutes le point z; il en est à fortiori de même pour les boules $B_X(x_i, \lambda \| x_i - z \|)$. D'après l'hypothèse, pour tout $\epsilon > 0$, les boules $(B_M(x_i, \lambda \| x_i - z \| + \epsilon))_{i=1}^n$ ont une intersection non vide; d'où la contradiction. Le couple (M, X) est donc λ-admissible.

Remarques. (a) Si le sous-espace M est de dimension finie, soit $\dim M = p$; nous pouvons nous limiter dans le corollaire précédent à prendre $n = p + 1$ et $\epsilon = 0$, comme le montre une utilisation du théorème de Helly et un argument de compacité.

(b) Le corollaire précédent et la remarque (a) permettent de retrouver le résultat suivant de Comfort et Gordon [2]:

Soit V un espace de Banach de dimension supérieure à 3; pour que l'espace V soit un espace de Hilbert, il faut et il suffit, que pour toute collection de trois boules fermées $(B_V(x_i, r_i))_{i=1}^3$ d'intersection non vide on ait $[\bigcap_{i=1}^3 B_V(x_i, r_i)] \cap \operatorname{lin}(x_1, x_2, x_3) \neq \varnothing$.

III. Extension d'Opérateurs Compacts et Couples λ-Admissibles

Le résultat suivant constitue une "localisation" du Théorème 2.1 de [11], sa démonstration repose sur le Lemme 2.13.

THÉORÈME 3.1. *Soient V un espace de Banach et M un sous-espace de V, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(a) *Le couple (M, V) est λ-admissible*;

(b) *Pour tout espace de Banach dual U', tout opérateur continue S de M dans U' admet un prolongement $\tilde{S}$ de V dans U' tel que* $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$.

(c) *Pour tout espace de Banach Y, tout opérateur faiblement compact (resp. compact) S de M dans Y admet un prolongement $\tilde{S}$ faiblement compact (resp. compact) de V dans Y vérifiant* $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$.

(d) *Pour tout espace de dimension finie Y, tout opérateur S de M dans Y admet un prolongement $\tilde{S}$ de V dans Y et vérifiant* $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Pour tout espace de Banach U, la transposée de l'injection canonique de U dans U'' s'identifie à une projection de norme 1 de U''' sur U'. Soit S un opérateur de M dans U' ; l'opérateur S'' est défini sur M'' à valeurs dans U'''. Soient P la projection canonique de U''' sur U' et T l'opérateur donné par le Corollaire 2.6; l'opérateur $\tilde{S} = P \circ S'' \circ T$ vérifie les conditions de (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) En utilisant le Corollaire 2.6 la démonstration est immédiate.

(a) $\Rightarrow$ (c). Supposons l'opérateur S faiblement compact; l'opérateur S'' vérifie $S''(M'') \subset Y$. Par suite, l'opérateur $\tilde{S} = S''T$ prolonge l'opérateur S à V tout entier et vérifie $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$; de plus, comme l'ensemble des opérateurs faiblement compacts forme un "idéal", l'opérateur $\tilde{S}$ est lui-même faiblement compact. Le cas des opérateurs compacts se traite de la même facon.

(d) $\Rightarrow$ (a). Soient Y un espace de dimension finie et S un opérateur faiblement continu de Y dans M'. Il existe donc un opérateur R de M dans Y' tel que $R' = S$. Soit $\tilde{R}$ un prolongement de R défini dans V et à valeurs dans Y' vérifiant $\| \tilde{R} \| \leqslant \lambda \| R \|$; notons $\tilde{S}$ l'opérateur transposé de $\tilde{R}$ défini sur $Y'' = Y$ et à valeurs dans V'. Il est clair que l'on a $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$. D'autre part, il est immédiat que $\tilde{S}$ est un relèvement de S (i.e., $\varphi \circ \tilde{S} = S$ où φ désigne la surjection canonique de V' sur M'). Soit maintenant B un sous-espace de dimension finie de M' ; d'après ce qui précède. l'injection canonique de B dans M' admet un relèvement T_B de B dans V' avec $\| T_B \| \leqslant \lambda$. Si M' est de dimension finie il n'y a rien à démontrer; supposons que l'espace M' est de dimension infinie, désignons par $\mathscr{X}$ l'ensemble filtrant croissant des sous-espaces de M' de dimension finie ordonné par inclusion. D'après le Lemme 2.13, il existe un opérateur T de M' dans V' de norme inférieure ou égale à λ, et tel que $T(f)$ est faiblement adhérent à la famille $(T_B(f_B))_{B\in\mathfrak{X}}$; l'opérateur T de M' dans V' est donc une sélection, et le couple (M, V) est λ-admissible.

Remarque. Le théorème reste vrai si, dans (c), on suppose uniquement que $\tilde{S}$ vérifie $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$, et en éliminant la condition $\tilde{S}$ faiblement compact (resp. compact).

COROLLAIRE 3.2. *Soit M un sous-espace d'un espace de Banach V; il existe $\lambda < \infty$ tel que le couple (M, V) soit λ-admissible si, et seulement si, pour tout espace de Banach E, tout opérateur compact de M dans E se prolonge en un opérateur compact de V dans E.*

Démonstration. Soient $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ la famille des sous-espaces de dimension finies de $l^\infty(\mathbb{N})$, et E la somme directe hilbertienne $E = \bigoplus_{l^2} E_\alpha$. L'application restriction de l'espace des opérateurs compacts de V dans E dans l'espace des opérateurs compacts de M dans E étant une surjection, il existe d'après le théorème du graphe fermé $\lambda < \infty$, tel que tout opérateur compact S de M dans E se prolonge un opérateur compact $\tilde{S}$ de V dans E qui vérifie $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$. Soit Y un espace de dimension finie, et S un opérateur de M dans Y; il existe α dans A tel que Y soit isométrique à E_α, par suite on peut considérer S comme un opérateur compact de M dans E. L'hypothèse montre que S admet un prolongement compact $\tilde{S}$ de V dans E qui vérifie $\| \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$; si P_α est la projection canonique de E sur E_α, l'opérateur $P_\alpha \circ \tilde{S}$ est une extension de S qui vérifie $\| P_\alpha \circ \tilde{S} \| \leqslant \lambda \| S \|$. La conclusion est une conséquence du Théorème 3.1(d). La condition nécessaire est conséquence du théorème précédent.

Rappelons qu'un espace de Banach M est un *$\mathscr{P}_\lambda$-espace* si pour tout espace de Banach V contenant M il existe une projection de V sur M dont la norme est majorée par λ. Les $\mathscr{P}_1$-espaces ont été caractérisés par Kelley; en effet, M est un $\mathscr{P}_1$-espace si, et seulement si, il existe un espace compact stonien X tel que M soit isométrique à l'espace $C(X)$ [4, p. 95].

COROLLAIRE 3.3. *Soit M un espace de Banach; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le couple (M, V) est λ-admissible pour tout espace de Banach V contenant l'espace M;*

(b) *Soit V_0 l'espace des fonctions numériques définies et continues* *sur $B(M')$ munie de la topologie $\sigma(M', M)$; le couple (M, V_0) est λ-admissible;*

(c) *L'espace M'' est un $\mathscr{P}_\lambda$-espace.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). Il n'y a rien à démontrer.

(b) $\Rightarrow$ (c). L'espace V_0 est un prédual de L-espace; par suite, l'espace V_0'' est un $\mathscr{P}_1$-espace [8]. Comme il existe une projection de norme inférieure à λ de V_0'' sur M'', ce dernier est un $\mathscr{P}_\lambda$-espace.

(c) $\Rightarrow$ (a). Soient V un espace de Banach contenant l'espace M, Y un espace de dimension finie, et T un opérateur de M dans Y; d'après le théorème 2.1 de [11] il existe un prolongement T_V de T à V, vérifiant $\| T_V \| \leqslant \lambda \| T \|$. D'après le Théorème 3.1 le couple (M, V) est λ-admissible.

Si l'on pose $\lambda = 1$ dans le corollaire précédent, nous obtenons une caractérisation des préduaux de L-espaces. Ce résultat constitue une réciproque et une démonstration simplifiée du Théorème 7.3 de [11]. Le Corollaire 2.6 et la remarque précédente permettent de montrer:

PROPOSITION 3.4. *Soient V un prédual de L-espace et M un sous-espace fermé de V; pour que le couple (M, V) soit admissible, il faut et il suffit que l'espace M soit un prédual de L-espace.*

Si V et W sont deux espaces de Banach isomorphes on pose $d(V, W) = \inf(\| T \| \| T^{-1} \| \,;\, T$ isomorphisme de V sur $W)$. Pour tout $1 \leqslant p < \infty$ (resp., $p = \infty$), on note $1_n{}^p$ l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|(x_i)\| = [\sum | x_i |^p]^{1/p}$ (resp., $\|(x_i)\| = \sup(| x_i |; i = 1,..., n)$). Un espace de Banach V est dit un *$\mathscr{L}_p$-espace* s'il existe $1 \leqslant \lambda < \infty$ tel que, pour tout sous-espace $E \subset V$ de dimension finie, il existe un sous-espace F de dimension finie contenant E et tel que $d(F, 1_n{}^p) \leqslant \lambda$. Pour les propriétés des $\mathscr{L}_p$-espaces le lecteur peut se reporter à [13]. En utilisant le fait que M est un $\mathscr{L}_\infty$-espace si, et seulement si, M'' est un $\mathscr{P}_\lambda$-espace, on peut établir un résultat analogue à la proposition 3.4 concernant les $\mathscr{L}_\infty$-espaces, ainsi que le résultat suivant qui est une conséquence du Corollaire 2.12.

COROLLAIRE 3.5. *Soient V un $\mathscr{L}_p$-espace et M un sous-espace fermé; s'il existe une projection uniformément continue de V sur M, l'espace M est un $\mathscr{L}_{p'}$-espace, avec $p' = p$ si $p = 1$ ou $p = \infty$, et $p' = p$ ou bien $p' = 2$ si $1 < p < \infty$.*

COROLLAIRE 3.6. *Un espace de Banach $V = W'$ est un $\mathscr{L}_1$-espace (resp. L-espace) si, et seulement si, il existe une application affine $k \to \mu_k$*

de $K = B(V)$ dans l'espace $M(K)$ des mesures sur K telle que pour tout point k de K on ait $\mu_k|_W = k$ et $\|\mu_k\| < \lambda < \infty$ (resp. $\|\mu_k\| \leqslant 1$).

Ce corollaire est une conséquence du Théorème 3.2; et pour $\lambda = 1$, ce corollaire établit une conjecture de [6] où nous avions aussi discuté l'unicité d'une telle sélection.

Le Théorème 3 de [14] et le Lemme 3.1 permettent d'établir le résultat suivant dont une version isométrique est démontrée par Kakutani dans [9] et une première version isomorphique est donnée dans [14].

THÉORÈME 3.7. *Soit V un espace de Banach; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'espace V est isomorphe à un espace de Hilbert réel;*

(b) *Pour tout sous-espace fermé M de V il existe $\lambda_M < \infty$ tel que le couple (M, V) soit λ_M-admissible;*[2]

(c) *Tout sous-espace $\sigma(V', V)$-fermé de V' est facteur direct dans V' (la projection considérée n'étant pas à priori $\sigma(V', V)$-continue).*

Remarque. Si le couple (M, V) est λ-admissible, tout opérateur faiblement compact (resp. compact) T de M dans lui-même admet une extension $\tilde{T}$ de même type de V dans M et vérifiant $\|\tilde{T}\| \leqslant \lambda \|T\|$. Nous ignorons si cette propriété caractérise les couples λ-admissibles. Cependant, s'il existe une famille filtrante croissante de sous-espaces de dimensions finies dans M tel que $M = \overline{\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha}$, et si pour tout $\alpha \in A$, il existe une projection P_α de V sur M_α de norme inférieure à $\lambda < \infty$, le couple (M, V) est λ-admissible comme le montre une application du Théorème 2.14.

PROPOSITION 3.8. (a) *Soit K un convexe compact contenant l'origine, et muni d'une sélection linéaire $k \to \mu_k$ à valeurs dans $M_+(K)$ (le cône des mesures positives sur K) telle que $\|\mu_k\| \leqslant \lambda < \infty$ pour tout k de K. Alors l'espace $E = lin(K)$ peut-être muni d'une norme équivalente à la jauge de $c(K \cup -K)$ pour laquelle E est un L-espace.*

(b) *Si de plus $k \to \|\mu_k\|$ est* s.c.i., *l'espace E peut-être muni d'une norme de L-espace dual équivalente à la jauge de $c(K \cup -K)$.*

Démonstration. (a) Si J_k désigne la jauge de K, il est clair que nous avons pour tout point k de K $J_K(k) \leqslant \|\mu_k\| \leqslant \lambda J_K(k)$. Soit C le cône engendré par K, ce cône est saillant. En effet, il suffit de remarquer que 0 est extrémal dans K; sinon, il existe k_1 et k_2 tels que

[2] C'est le cas s'il existe une projection uniformément continue (non nécessairement linéaire) de V sur M.

$0 = \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$, par conséquent $\mu_{k_1} = -\mu_{k_2}$ ce qui contredit le fait que les mesures μ_k sont positives. L'application $k \to \mu_k$ peut-être prolongée naturellement à C tout entier et l'application $k \to \| \mu_k \|$ est linéaire et positive sur ce cône. Comme nous avons

$$\{k \in C; \| \mu_k \| \leqslant 1\} \subset K \subset \{k \in C; \| \mu_k \| \leqslant \lambda\},$$

le cône C est $\sigma(C, A_0(K))$-complet d'après [17]. L'application $k \to \mu_k$ définie sur C peut-être considérée comme une sélection à valeurs dans le cône des mesures coniques sur C; par conséquent C est un cône réticulé [16]. Désignons par $F = \{k \in C; \| \mu_k \| = 1\}$ et par $K_0 = c(F \cup -F)$; le convexe F est une base (non compacte) de C et K_0 engendre E. De plus $K_0 \subset c(K \cup -K) \subset \lambda K_0$, par suite la norme J_{K_0} est équivalente à la norme jauge de $c(K \cup -K)$. Par construction F^+ est une face maximale de K_0, ainsi, d'après [18] l'espace E muni de J_{K_0} est un L-espace.

(b) Si $k \to \| \mu_k \|$ est s.c.i., l'ensemble $\{k \in K; \| \mu_k \| \leqslant 1\} = K_0{}^+$ est un chapeau compact de C et E est le dual de l'espace simplicial $A_0(K_0{}^+)$ muni de l'ordre et de la norme naturels.

Pour la définition et les propriétés des espaces simpliciaux le lecteur peut se reporter à [5]

COROLLAIRE 3.9. *Soient V un espace simplicial et P une projection positive de V sur un sous-espace M; l'espace M est isomorphe à un espace simplicial.*

Démonstration. Pour montrer que le cône positif M'^+ de M' est réticulé il suffit de vérifier que l'espace M possède la propriété d'interpollation de Riesz. Soient $(x, y) \leqslant (z, t)$ un tel quadruplet dans M; il existe s dans V tel que $(x, y) \leqslant s \leqslant (z, t)$, comme P est positive, on a $(x, y) \leqslant P(s) \leqslant (z, t)$. D'autre part, l'application P' transposée de P est un opérateur positif, par conséquent à tout point k de $B(M'^+)$ (partie positive de $B(M')$) on peut associer le point $P'(k)$ dans V'^+ et à ce dernier une mesure positive $\mu_{p'(k)}$ qui le représente et qui est concentrée sur $B(V'^+)$, de façon que l'application $P'(k) \to \mu_{p'(k)}$ soit linéaire. L'application $k \xrightarrow{s} \| \mu_{p'(k)} \|$ est linéaire et s.c.i. sur le cône M'^+, par suite, $K_0{}^+ = \{k \in M'^+ ; s(k) \leqslant 1\}$ est un chapeau compact de M'^+. Comme l'espace M' est positivement engendré, les inclusions $K_0{}^+ \subset B(M'^+) \subset \| P \| K_0{}^+$ impliquent que la norme de M' est équivalente à la norme jauge de $K_0 = c(K_0{}^+ \cup -K_0{}^+)$, et pour cette dernière norme M' est un L-espace dual, comme le montre la démonstration du résultat précédent. L'espace M muni de la norme de la convergence uniforme sur $K_0{}^+$ est un espace simplicial.

Notons en rapport avec ce résultat que Stegall [20] a montré q'un $\mathscr{L}_1$-espace dual d'un espace de Banach séparable est isomorphe à un L-espace dual; mais on ignore si tout $\mathscr{L}_\infty$-espace séparable est isomorphe à un prédual de L-espace.

Remarquons pour terminer qu'il existe un convexe compact K qui engendre le cône $M_+([0, 1])$, tel que $c(K \cup -K)$ définisse une norme équivalente à la norme habituelle de l'espace des mesures sur $[0, 1]$ mais tel qu'il n'existe pas de sélection linéaire $k \to \mu_k$ de K dans $M_+(K)$ vérifiant les conditions de la proposition 3.8(a).

References

1. E. Alfsen and E. Effros, Structure in real Banach spaces I, II, à paraître dans *Ann. of Math.*
2. W. Comfort and H. Gordon, Inner product spaces and the three spherical intersection property, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961), 327–329.
3. H. Corson and V. Klee, Topological classification of convex sets, *Proc. Symp. Pure Math. Convexity* (1963), 37–51.
4. M. Day, "Normed Linear Spaces," Springer, Berlin, 1963.
5. E. Effros, Structure in simplexes, *Acta. Math.* **117** (1967), 103–121.
6. H. Fakhoury, Une caractérisation des L-espaces duaux, à paraître dans *Bull. Sci. Math.*
7. H. Fakhoury, Projections contractantes dans $C(X)$, Séminaire d'Initiation à l'Analyse 70/71, n° 5.
8. A. Grothendieck, Une caractérisation véctorielle métrique des espaces L^1, *Canad. J. Math.* **7** (1955), 552–561.
9. S. Kakutani, Some characterizations of Euclidian spaces, *Japan J. Math.* **16** (1939), 93–97.
10. J. Lindenstrauss, On a problem of Nachbin concerning extension of operators, *Israel J. Math.* **1** (1963), 75–84.
11. J. Lindenstrauss, Extension of compact operators, *Mem. Amer. Math. Soc.* **48** (1964), 1–112.
12. J. Lindenstrauss, Non linear projections, *Michigan Math. J.* **11** (1964), 263–287.
13. J. Lindenstrauss and H. Rosenthal, The $\mathscr{L}_p$-spaces, *Israel J. Math.* **7** (1969), 325–349.
14. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, On the complemented subspace problem, *Israel J. Math.* **9** (1971), 263–269.
15. E. Michael, Continuous selections I, *Ann. of Math.* **63** (1956), 361–382.
16. H. Fakhoury, Une caractérisation des simplexes compacts et de cônes réticulés: Applications. Séminaire d'Initiation à l'Analyse 1969–1970, n° 2.
17. H. Fakhoury, Structures uniformes faibles sur une classe de cônes et d'ensembles convexes, *Pacific J. Math.* **39** (1971), 641–654.
18. R. Fullerton, A characterisation of L-spaces, *Fund. Math.* **38** (1951), 127–136.
19. H. Lacey, Some characterizations of $\mathscr{L}_\infty$-spaces, à paraître.
20. C. Stegall, On spaces whose duals contain $l^1(\Gamma)$, à paraître.
21. H. Fakhoury, Sélections linéaires associées au théorème de Hahn–Banach, *C. R. Acad. Sci.* **271** (1972), 628, 756.